

A többszemponútú döntési problémák megoldásának - mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásait tekintve - nemzetközileg egyik legismertebb módszere az Analytic Hierarchy Process (AHP). A módszer alapja a Saaty-féle sajátvektor módszer, ami a döntéshozatal során létrejövő $n \times n$ -es méretű (n pozitív egész szám) pozitív elemű, reciprokok mátrixok döntési vektorokkal való közelítését adja meg. A szinguláris érték felbontás (SVD) a mátrix algebra egyik fontos eszköze, amit pl. a főkomponens analízis, kanonikus korrelációs számítás, a Moore-Penrose általánosított inverzek vagy alacsony rangú mátrix approximációk meghatározása során alkalmaznak. A [23] dolgozatban, Gass, S.I. professzorral (University of Maryland) közösen megmutatjuk, hogy az AHP módszertanban a sajátvektor módszer helyettesíthető elméletileg jól megalapozott, SVD-re épülő módszerrel. A [6], [32] és [81] cikkekben a páros összehasonlítás mátrixok alapján történő súlyozási módszerek közül a legkisebb négyzetes feladatok (LSM) új megoldási módszere található a 3×3 -astól a 8×8 -as mátrixméretig. A minimalizálandó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű. A feladat megoldására korábban használatos Newton-iterációs technikáktól eltérően a tárgyalta módszerek alkalmasak a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes becslésének mint optimalizálási feladatnak az összes lokális és globális minimumhelyének meghatározására. A tapasztalatok alapján a 3×3 -as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok, 3×3 -as és 4×4 -es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver, 8×8 -as méretig pedig a homotópiás módszer. A többszemponútú döntési feladatok megoldása során több szubjektív értékelés is születik, mint pl. a szempontok fontossági súlyai és az alternatívák a szubjektív szempontok szerinti értékelései. Mivel ezek az értékelések nem elég pontosak, ezért fontos vizsgálni az eredmények érzékenységet az értékelések kis változásai esetén. Amikor megoldunk egy többszemponútú döntési feladatot, célszerű olyan döntési elvet választani, amelyik a lehető legstabilabb megoldásokhoz vezet. A [36] cikkben bemutattunk egy genetikus programozás alapú módszert, ami jobb döntési elvekhez vezet, mint az eddigiekben használtak. Az elméleti elvárásainkat esettanulmányokkal támasztottuk alá. A [68] cikkben néhány konzisztencia típust vezetünk be és vizsgálunk (a páros összehasonlítás mátrixokra vonatkozó tranzitivitás különböző fokozataiként), továbbá szükséges és elégséges feltételeket adunk az ilyen tulajdonságok fennállására. A [82] cikkben néhány inkonzisztencia mérőszámot vizsgálunk meg és hasonlítunk össze. Megmutatjuk, hogy a Saaty által definiált, maximális sajátértéken alapuló mérőszám a legtöbb esetben nem detektálja az inkonzisztencia lehetséges forrását. Feltárjuk továbbá a véletlen módon generált páros összehasonlítás mátrixok maximális sajátértékének korábban nem vizsgált tulajdonságait, például a maximális mátrixelemtől való erős függését.

A légkörbe jutó üvegház hatású gázok mennyiségének csökkentésére vonatkozó tárgyalásokat tökéletes információjú extenzív játék formájában modelleztük. Különböző megoldási koncepciók alkalmazásával végeztünk elemzéseket és számításokat, úgymint Nash egyensúly, reakció függvény egyensúly, korrelált egyensúly és alku megoldás. Speciális redukciós eljárásokat alkalmaztunk az olyan esetekre, amikor a játék fája túlságosan nagyvá válik. Egy új megoldási koncepciót, a fakorrelált egyensúly fogalmát is bevezettük. A különböző megoldások kiszámítására kifejlesztettünk egy Excel add-in program-csomagot, ennek legfontosabb funkcióit ismertetjük, majd ennek felhasználásával bemutatjuk egy speciális tárgyalási szcenárió elemzését. [38]

Sima optimalizálási feladatok megoldása a témája Rapcsák T. az European Journal of Operational Research (143 (2002) 365-376) folyóiratban megjelent cikkének. Ehhez a témához kapcsolódik a [27] dolgozat, ahol érdekes és fontos statisztikai optimalizálási feladatok, pl. főkomponens analízis, statisztikai vizualizálás, SVD, a lineáris algebra egyik alaptétele, a mátrix spektrál tétel és dinamikus rendszerek sktukturális stabilitási kérdései vannak visszavezetve Stiefel sokaságon történő optimalizálásra, ahol a fő kérdés az, hogyan lehet optimális ortogonális

mátrixokat optimalizálási módszerrel meghatározni. Ezen a feladatosztályon belül fontos részosztály az, ahol $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixok k -dimenziós domináns altereit kell meghatározni (k -dimenziós domináns altérnek nevezzük a k legnagyobb sajátértékhez tartó sajátvektorok által kifeszített alteret). A dolgozatban erre a feladatosztályra adunk meg globális optimalitási feltételeket. A [21] és a [30] dolgozatokban globális optimalizálási szempontból vizsgáljuk a Stiefel sokaságokon értelmezett optimalizálási feladatokat és néhány globális optimalizálási módszer teszt eredményeit ismertetjük, majd ismert globális optimumponttal és függvényértékkel rendelkező teszt feladatokat adunk meg.

A [60] és a [61] dolgozatokban Fenchel 1953-ból származó nívóhalmaz problémájának a megoldása található sima esetben. Az alapprobléma a következő: mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egymásba ágyazott, konvex halmazsereg konvex függvény alsó nívóhalmazait adja? A főtétele bizonyítása differenciálgeometriai eszközök használatára épül, nevezetesen, a sima sokaságokon értelmezett görbe geometriára (geometry of paths). Ez a megközelítés új eredményekre vezetett a kép-analízisben a konvexszerű és általánosított konvexszerű leképezésekkel kapcsolatosan (angol megfelelői: convexlike and generalized convexlike mappings), és lehetővé tette a pszeudokonvex függvények - az analitikus mechanikából származtatott - egy új osztályának a szükséges és elegendő feltételekkel történő geometriai jellemzését. Az [59] dolgozatban a Fenchel nívóhalmaz problémájával kapcsolatos eredmények összefoglalása található. A [80] és [92] cikkekben kvadratikus törtfüggvények pszeudolinearitását jellemezzük

A [33] dolgozatban, Crouzeix professzorral (Université Blaise Pascal) közösen, a mikroökómia fogyasztás elméletének feltételes volumenmaximum-feladatát és az abban szereplő közvetlen és közvetett hasznossági függvényeket vizsgáljuk Marshall-féle keresleti függvény létezése esetén. A lineáris parciális differenciál egyenletek megoldhatóságát jellemző Frobenius tétel továbbfejlesztésével differenciálható pszeudomonoton leképezések integrabilitására adunk feltételt és az eredmény közgazdasági következményét vizsgáljuk a nyilvánított preferenciák témakörében.

A Riemann sokaságokon a Németh S. Z. által bevezetett monoton vektor mezők szingularitásait vizsgáltuk. Egy partikuláris sokaság osztály esetén kifejlesztettünk egy extragradiens típusú módszert, amelyik konvergens ilyen típusú vektormezők szingularitásaihoz. Sajátos esetben, az általunk kifejlesztett módszert használni lehet Euklideszi terekben értelmezett nemlineáris optimalizálási feladatok megoldására, ahol a célfüggvény konvex és a feltételek állandó görbületű Hadamard sokaságot adnak meg. A módszer megmutatja, hogy a konvex analízis módszerei Riemann sokaságokon hatékonyan használhatók bizonyos Euklideszi terekben értelmezett nemkonvex programozási feladatok megoldására. [37] Krasznoszlenskij egyik ismert fixpont tételéből kiindulva az általunk bevezetett skaláris és aszimptotikus skaláris derivált fogalmát használtuk új fixpont tételek generálására. Az eredményeket szűrjektivitási tételek, variációs egyenlőtlenségek, komplementaritási feladatok és integrálegyenletek megoldására használtuk. [13] A skaláris és aszimptotikus skaláris derivált fogalmának a segítségével általánosítottuk Altman egyik ismert fixpont tételét. A kapott eredményt szűrjektivitási tételek, nemlineáris spektrál tételek és integrálegyenletek megoldására használtuk. [25] A [88] könyv fő újdonsága az, hogy a skaláris derivált és aszimptotikus skaláris derivált fogalmát, valamint azok alkalmazásait fogja bemutatni. A főbb alkalmazási területek: fixpont tételek, szűrjektivitási tételek, nemlineáris spektrál tételek, variációs egyenlőtlenségek, komplementaritási feladatok, integrálegyenletek és Riemann geometriai feladatok. Több halmazértékű komplementaritási feladatra vonatkozó létezési tételt bizonyítottunk. Az eredmények igazolására a George Isac által bevezetett kivételes elemcsalád, az általunk bevezetett infinitézimális kivételes elemcsalád és a skaláris derivált fogalmát használtuk. [40] A variációs egyenlőtlenségek néhány klasszikus eredményét kiterjesztettük Hadamard

sokaságokra. [18] Képleteket bizonyítottunk a skaláris derivált kiszámítására Hilbert tereken. Ezek a képletek a skaláris derivált segítségével megfogalmazott fixpont tételek, szűrjektivitási tételek, variációs egyenlőtlenségek, komplementaritási feladatok és integrál-egyenletek létezési tételei esetén jelennek meg. [71] A [65], [85], [86], [87] dolgozatokban a skalár deriváltra alapozva fontos feladatoszályokra lettek megoldhatósági feltételek megfogalmazva. A [64] dolgozatban topológikus módszerek segítségével vizsgáltuk a fix-pontok és a nemlineáris operátorok pozitív sajátértékeit. A [63] cikkben a proximális pont módszer lett kiterjesztve konvex és monoton optimalizálási feladatra.

Legfeljebb 2-indexű, jól párosított, kéttényezős főtagú lineáris differenciál-algebrai egyenlet paraméterfeladatának megoldhatóságára kritériumokat adtunk fundamentális mátrix, illetve az adjungált egyenlet segítségével. [5]

Az optimalizálás gyakorlati alkalmazásainak túlnyomó részében a megoldandó optimalizálási feladatokat modellezési nyelvek vagy más automatikus modell generátorok szolgáltatják. Ezek az eszközök nem képesek a feladatok strukturális vizsgálatára, ezért az optimalizáló szoftverek számára generált feladatokban gyakran jelentős redundancia van jelen mind a primál, mind a duál oldalon. Ezen redundanciák előzetes kiszűrése fontos lépés az optimalizáló szoftverek számára. A [45] cikkben olyan, részben új módszereket ismertettünk, melyek hatékonyak a feladatok struktúráinak felismerésében és a redundancia kiszűrésében. Módszereinket lineáris, kevert egész értékű és kvadratikusan feladatokra fejlesztettük ki és ilyen típusú feladatokon teszteltük. A kvadratikusan optimalizálás fontos feladatoszály az operációkutatásban, mert a szekvenciális kvadratikusan programozás a nemlineáris optimalizálás alapvető módszertani megközelítését adja. A [69] dolgozatban azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik strukturálisan a nemszeparábilis kvadratikusan feladatok ritkássága belső pontos algoritmusokban. Megmutatjuk, hogy a lineáris programozásra kifejlesztett ritkasságot kezelő heurisztikák hogyan vihetők át a kvadratikusan programozás esetére belső pontos algoritmusokban. A módszereink hasznosságát numerikus példákon keresztül igazoljuk. A belső pontos módszerek iterációi közben nagyméretű, szimmetrikus indefinit rendszerek megoldását kell meghatároznunk, amit a gyakorlatban Cholesky-szerű szimmetrikus dekompozícióval oldunk meg. A számítások műveletigényét nagyban befolyásolja speciális ritkassági struktúrák felismerése. A [78] dolgozat új módszert ismertet annak detektálására, ha a normál egyenletrendszer használata nagymértékű feltöltődéshez vezet. Az algoritmus pontosan és hatékonyan meghatározza azokat a változókat, amelyek oszlopai a feltöltődésért felelősek. Az ilyen oszlopok leválasztása és külön kezelése által a hatékonyság lényegesen növelhető, amit numerikus kísérleteken keresztül igazolunk. A belső pontos módszerek implementációjának alapvető lépése a kereső irány meghatározása, melyhez ortogonális projekciókat kell számítani, amely számítások a gyakorlatban Cholesky dekompozícióval történnek. Lényeges tehát, hogy a Cholesky dekompozíció számítása során megfelelő numerikus pontosságot érjünk el. A [44] dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a feladat algebrai tulajdonságai milyen hatással vannak ezen dekompozíció pontosságára. Megmutatjuk, hogy míg az optimalizálási feladatok degeneráltsága kezelhető a Cholesky faktorizáció egy módosított változatával, addig a rosszul skálázottság a jelenlegi módszerekkel nem megoldható problémákhoz vezethet. A [90] dolgozatban egy regularizációs eljárást írtunk le, mely az ilyen esetekben sikeresen alkalmazható. Megadtuk az eljárás konvergenciájának kritériumait, és megmutattuk, hogy a konvergencia relaxációs módszerekkel tovább javítható.

A térlefedési kódok (covering codes) lényegében többdimenziós diszkrét terek (Hamming terek) adott sugárral történő lefedését biztosító halmazok, melyek a számítógépes technológiák legkülönbözőbb területeken alkalmazhatók. A térlefedési kódok alapproblémája: Hamming terekben, vagyis adott hosszúságú - bináris, ternáris stb., illetve vegyes - jelek sorozatai által alkotott terekben előírt térlefedési sugarú és lehetőleg minél kisebb számosságú kódok keresése. A probléma kezelésére általános módszer nem létezik, szinte minden eset külön

megfontolást igényel. Az alkalmazott módszertan kombinatorika, kombinatorikus optimalizálás, lineáris algebra, egészértékű programozás módszerei mellett sajátos kódelméleti módszerek széles skáláját öleli fel. Hatékony számítógépek igénybevétele egyre inkább elkerülhetetlen új eredmények eléréséhez e területen, mivel esetenként akár több millió objektum tulajdonságainak a megvizsgálására is szükség lehet. Általában komoly eredménynek számít az optimum értékére jó alsó, illetve felső korlát megadása, helyesebben az ismert korlátok javítása. A pontos érték csak kevés esetben ismert. A [15], [42], [76], [77] cikkekben közölt eredmények részben a megoldott esetek halmazát bővíti ki, részben az előzőleg ismert korlátok javítását adja meg végtelen sok, illetve nagyszámú egyedi esetre. A [15] cikk fő eredménye: bináris-ternáris kódok esetére és legfeljebb 5 számosság esetére a probléma teljeskörű megoldása tetszőleges számú ternáris, illetve bináris koordinátára és tetszőleges sugárra. Ezt az eredményt terjeszti ki a [77] cikk 6 és 7 számosságú kódokra, a [76] cikk pedig teljesen általános vegyes Hamming terek esetére. A [42] cikk bővebb alaphalmazú Hamming terekre vonatkozó eredményeket ismertet. Az új eredmények elérését nagyban segítette az adott térlefedési sugarú szűrjektív kód fogalmának bevezetése, és ilyen kódok keresése. A [14] cikkben közölt módszert a Hamming távolság (vagyis két jelsorozatban a nem egyező jelek számának) meghatározására az előbbieken felsorolt cikkek, elsősorban a [77] cikk számításai meggyorsításának a célja inspirálta. MDS kódokra vonatkozó eredményeket tartalmaznak [41] és a [66] cikkek. E cikkekben különböző méretű és típusú szuperreguláris mátrixok létezésére és számára vonatkozóan nagyszámú eddig megoldatlan esetre adtuk meg a választ. A cikk talán legmeglepőbb eredménye annak megmutatása, hogy a geometerek által intenzíven vizsgált második leghosszabb teljes ív (véges projektív terekben) a tér alapszámának nem monoton függvénye. A [67] cikk a címében szereplő kód-család teljes leírását adja, tehát a különböző R sugarakhoz tartozó 7 számosságú bináris (és térlefedési szempontból optimális) kódok struktúrájának, továbbá automorfizmus csoportjának a leírását is tartalmazza. A cikk hivatkozásként bekerült az N.J.A. Sloane által szerkesztett egész számok sorozatai online enciklopédiájának (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) adatbázisába a <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A002625> címen. Az ívek számára vonatkozó eredmény ([66] cikk) ugyanitt az A000509 sorozathoz kapcsolódik, két újabb taggal bővítve azt.

A Nemlineáris optimalizálás című jegyzet [73] a Budapesti Corvinus Egyetem gazdaságmatematikai elemző közgazdász hallgatói részére készült. A jegyzet szakít azzal az általános gyakorlattal, hogy az anyag tárgyalása módszertani szempontok alapján történik, hanem inkább a gyakorlati alkalmazások lehetőségét szem előtt tartva, a modellezésre helyezi a fő hangsúlyt.

II. Kutatás-fejlesztés

A kutatás mellett néhány környezeti és/vagy döntési modellezésre épülő, kutatás-fejlesztési munkában vettünk részt.

1. Térinformatikai adatbázisokra épülő döntési és környezeti modellező eszközök fejlesztése — 2003-2004

Megbízó: Oktatási Minisztérium

Az Oktatási Minisztérium által meghirdetett Műszaki kutatás-fejlesztési pályázat keretében az OM és az MTA SZTAKI között megkötött szerződés alapján az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium és Osztály *Térinformatikai adatbázisokra épülő döntési és környezeti modellező szoftver eszközök fejlesztése* címmel indított kutatási-fejlesztési projektet, melynek célja a döntési és környezeti modellek együttes alkalmazásán

alapuló, digitális térképi alapú, GIS eszközöket használó környezeti modellezési és döntéstámogató módszertan és programrendszer továbbfejlesztése, amely a jelenségek és folyamatok vizsgálatára szolgáló környezeti és döntési modellek kidolgozása és megoldása után a generált és a rendelkezésre álló térinformatikai adatbázisokból az igényeknek megfelelő tematikus térképek készítését teszi lehetővé. A módszertan és az arra épülő szoftver segíteni tudja a döntéshozókat a jelenleg nem kielégítően kezelhető környezetvédelmi problémák megoldásában és a megfelelő döntések meghozatalában ipari, kereskedelmi, szolgáltató stb. létesítmények megvalósításának kérdésében.

A projekt keretében a következő feladatok elvégzésére került sor:

- környezeti modellek kialakítása és a megoldó algoritmusok kidolgozása;
- döntési modellek kialakítása és a megoldó algoritmusok kidolgozása;
- környezeti információs rendszer tervezése: adatstruktúrák és eljárások meghatározása környezeti elemenként;
- döntéstámogató rendszer tervezése: adatstruktúrák, eljárások meghatározása a különböző döntési problémákra;
- környezeti információs rendszer szoftveres megvalósításaként a keretprogram és környezeti elemenként a következő modellek megvalósítása, az alábbi részletezésben:
- levegő: pontforrásokra, vonalforrásokra és felületi forrásokra vonatkozó modellek megvalósítása, vizualizálás;
- víz: talajvízre és felszíni vizekre vonatkozó modellek megvalósítása; döntéstámogató rendszer szoftveres megvalósításaként;
- többszemponútú egyéni döntési modell megvalósítása és megoldása, többszemponútú csoportos döntési modellek megvalósítása és megoldása, érzékenységvizsgálat, vizualizálás;
- a környezeti információs rendszer tesztelése, a dokumentációk elkészítése, a minőségbiztosítási előírásoknak megfelelően;
- a döntéstámogató rendszer tesztelése, a dokumentációk elkészítése a minőségbiztosítási előírásoknak megfelelően.

**2. Tenderek értékelése, eredmények érzékenységvizsgálata, főbb kockázatok értékelése
— 2003-2004**

Megbízó: MAVIR Magyar Villamosenergia-ipari Rendszerirányító Részvénytársaság

A munka során a MAVIR Rt. által kijelölt projektekből, az Ajánlati Felhívások és Versenytárgyalási Dokumentációk alapján, az általunk kifejlesztett WINGDSS módszertan és szoftver felhasználásával pályázatok értékelésében és kockázatelemzésében vettünk részt.

**3. A budapesti 4. számú metróvonal II. szakaszának környezeti hatásvizsgálata
— 2006-2007**

Megbízó: Mélyépterv Kultúrmérnöki Kft.

Ennek a munkának a keretében az építési változatok összehasonlítása, valamint üzemelő metróval, illetve a metró megvalósítása nélkül a jövőben várható közlekedési és környezeti állapotok összehasonlítása volt a feladat. Ez térbeli, többszemponútú, csoportos döntési problémák megoldását tette szükségessé, amit az általunk kifejlesztett WINGDSS módszertan és szoftver, és a szintén általunk készített BPVM1.0 Budapest térinformatikai rendszer segítségével oldottunk meg.

4. Környezeti terjedésmodellező szoftverek értékesítése — 2007

A GraphIT Kft. részére 3 db. APT (szennyezőanyagok levegőben történő terjedését modellező szoftver), 3 db. SWPT (szennyezőanyagok folyóvízben történő terjedését modellező szoftver) és 3 db. GWPT (szennyezőanyagok talajvízben történő terjedését modellező szoftver) licenstet értékesítettünk. A környezeti modellező szoftvereket folyamatosan fejlesztettük ki a különböző környezeti vizsgálatokat is tartalmazó munkáinkhoz.

5. Az Új Magyarország Vidékfejlesztési Programhoz kapcsolódó rendezvényszervezés és árubeszerzés nyílt eljárású közbeszerzési pályázat döntési modellje és értékelése — 2007 - 2008

Megbízó: Földművelésügyi és Vidékfejlesztési Minisztérium

Döntéselőkészítő tanulmány készítése és pályázatok értékelése nyílt közbeszerzési eljárás lefolytatásához.

6. Legrövidebb út keresése úthálózatban súly- és méretkorlátozások figyelembevételével — 2007

Megbízó: GraphIT Kft.

Egy Visual Basicből és Active Server Pages programokból meghívható, ActiveX DLL könyvtárból hívható eljárást fejlesztettünk ki, ami nem kapcsolódik konkrét úthálózathoz vagy térinformatikai alkalmazáshoz. Input adat az úthálózat gráfja, az élek hossza és korlátozásai, a csúcspontok esetleges földrajzi koordinátái, a keresendő legrövidebb út kezdő- és végpontja, valamint a figyelembe veendő korlátozások, az output pedig a legrövidebb út élei.

7. Telephelyek éves üzemeltetésének modellezése — 2007

Megbízó: Prímagáz Hungária ZRt

Modellezési és számítási munkákat végeztünk optimális termelési és szállítási tervvariánsok kidolgozására.